

Rappel:

$$z = x + iy \quad z = |z| e^{i \arg(z)}$$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Formules d'Euler:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Théorème 2.17 : Formule de Moivre.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)$$

Preuve Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ quelconques

Alors,

$$\underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{e^{i\varphi}}^n = (e^{i\varphi})^n$$

$$= e^{i \cdot \varphi \cdot n} = \cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)$$



Example 2.18

(i) Calculons $(1+i)^8$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} (1+i)^8 &= (\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^8 \\ &= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8 \left(\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

$$= 2^4 \left(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi) \right)$$

$$= 16 (1 + i \cdot 0) = 16.$$

§ 2.3 Résolution d'équations polynômes dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.19 (racines $n^{\text{èmes}}$) $z^n = w$

Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Alors, $\exists z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ distincts

tg $\forall k=0, \dots, n-1,$

$$z_k^n = w$$

Remarque 2.20

Cette proposition nous assure l'existence de

n solutions distinctes de l'équation $z^n = w$. Comment les trouver?

Étape 1: Écrire w sous forme polaire: $w = |w| e^{i \cdot \arg(w)}$

Étape 2: Retrouver tous les arguments

de w : pour $k \in \mathbb{Z}$

$$w = |w| e^{i(\arg(w) + 2k\pi)}$$

Étape 3: Multiplier tous les exposants

par $\frac{1}{n}$:

$$|w|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}}$$

Étape 4 prendre $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}}$$

Définition 2.21 (Racines n èmes de w)

Si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}}$$

sont appelées

les racines n èmes de w .

Exemple 2.22

(i) Les racines 4^{èmes} de 1

$$|1| = 1, \quad \arg(1) = 0.$$

$$\underline{E1} \quad 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

$$\underline{E2} \quad 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 2h\pi} \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{E3} \quad 1^{1/4} e^{i \frac{2h\pi}{4}} = e^{i \frac{h\pi}{2}}$$

$$\underline{E4} \quad h = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = e^{i \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2}} = 1, \quad z_1 = e^{i \frac{\pi}{2}} = i,$$

$$z_2 = e^{i\pi} = -1, \quad z_3 = e^{i \frac{3\pi}{2}} = -i$$

(ii) Les racines 2^{èmes} de i , $|i| = 1$,

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{E1} \quad i = 1 \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{E2} \quad i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2h\pi)} \quad h \in \mathbb{Z}$$

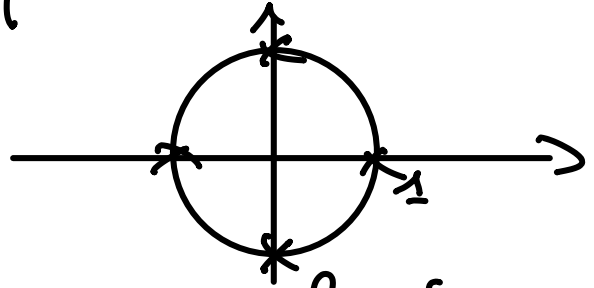
$$\underline{E3} \quad e^{i(\frac{\pi}{4} + h\pi)}$$

$$\underline{E4} \quad h = 0, 1.$$

$$z_0 = e^{i \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 = e^{i \frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Remarque 2.23

(i) Les racines $n^{\text{èmes}}$ sont toujours uniformément réparties sur un cercle de rayon $|w|^{1/n}$



(ii) Si $n=2$. $z = x + iy$ est l'inconnue
 $w = a + ib$ est la donnée.

$$z^2 = w \iff x^2 - y^2 + i2xy = a + ib$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & \text{(partie réelle)} \\ 2xy = b & \text{(partie imaginaire)} \end{cases}$$

On distingue 2 cas:

Cas 1: $b \neq 0$

$$y = \frac{b}{2x}$$

$$a = x^2 - y^2 = x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = x^2 - \frac{b^2}{4x^2}$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$$

On résout pour x^2 puis x

⚠ x doit être réel.

Puis on pose $y = \frac{b}{2x}$, $z = x + iy$
sera une racine 2^{ème} de w .

Cas 2 : $b = 0$.

Si $a \geq 0$, $x = \pm \sqrt{a}$, $y = 0$

Si $a \leq 0$, $x = 0$, $y = \pm \sqrt{|a|}$

Exemple 2.24

$$z^2 = 3 + 4i, \quad b = 4 \neq 0.$$

$$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0.$$

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$= \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ 4 \end{array}$$

On jette, $x^2 = -1$ pas de solution réelle.

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

$$x = -2, \quad y = \frac{4}{2(-2)} = -1.$$

$$\Rightarrow z_0 = -2 - i$$

$$x=2, \quad y = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$$

$$z_1 = 2 + i$$

Vérifions: $z_1^2 = 4 - 1 + i \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 3 + 4i$

Théorème 2.25: Théorème fond.
de l'algèbre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$
 tq $a_n \neq 0$ et le polynôme de
 degré n :

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

Alors, P admet n racines dans $\mathbb{C}$,
 Plus précisément, $\exists z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

tq

(i) $\forall k = 1, \dots, n, \quad P(z_k) = 0$

(ii) $P(z) = a_n \cdot \prod_{k=1}^n (z - z_k)$

Remarque 2.26

(i) La factorisation de polynômes et la résolution d'équation polynomiales étant liés (thm 0.48, $p(a)=0 \Leftrightarrow p(z)$ se factorise par $z-a$.) le théorème garantit l'existence d'une factorisation et l'existence de solutions.

Mais, pas de méthode pour trouver les solutions

(ii) Une méthode pour trouver une factorisation est de deviner une racine z_0 et faire la division euclidienne de p par $z-z_0$

Remarquons que

$$a_0 = p(0) = a_n \cdot \prod_{k=1}^n (0 - z_k) = (-1)^n a_n \prod_{k=1}^n z_k$$

Donc, $\frac{a_0}{a_n}$ est au signe près le produit de toutes les racines.

Donc, si $\frac{a_0}{a_n}$ est un nombre entier commencer par tester ses diviseurs au signe près.

Exemple 2.27 :

$$p(z) = -3z^3 - (6-6i)z^2 + (3+12i)z + 6.$$

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{6}{-3} = -2 \rightarrow \text{on teste } -2, -1, 1, 2.$$

$$p(-2) = 3 \cdot 8 - (6-6i) \cdot 4 - (3+12i) \cdot 2 + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r}
 -3z^3 - (6-6i)z^2 + (3+12i)z + 6 \\
 -(-3z^3 - 6z^2) \\
 \hline
 6iz^2 + (3+12i)z + 6 \\
 -(6iz^2 + 12iz) \\
 \hline
 3z + 6 \\
 -3z + 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 z+2 \\
 \hline
 -3z^2 \\
 +6iz \\
 +3
 \end{array}$$

$$\Rightarrow -3z^3 - (6-6i)z^2 + (3+12i)z + 6 \\
 = (z+2)(-3z^2 + 6iz + 3)$$

$$-3z^2 + 6iz + 3$$

$$\frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3}}{-6} = \frac{-6i \pm \sqrt{0}}{-6} = i$$

$$\Rightarrow -3z^2 + 6iz + 3 = -3(z-i)^2$$

$$\Rightarrow -3z^3 - (6-6i)z^2 + (3+12i)z + 6 \\
 = -3(z+2)(z-i)^2$$

Remarque 2.28

Sur $\mathbb{R}$, on sait que les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$, sont données par
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 tant que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Dans les complexes, on peut faire la même chose, mais on remplace $\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ par $\pm \omega_1$ et $\pm \omega_2$ où ω_1 & ω_2 sont les deux racines 2^{èmes} complexes de $b^2 - 4ac$.

(ou $\pm \omega_1$ ou que $\omega_1 = -\omega_2$)

$b^2 - 4ac \geq 0$, les deux racines compl.
de $b^2 - 4ac$, $\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Proposition 2.29:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,
! !

tel $a_n \neq 0$ et le polynôme

à coefficients réels

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

Alors, les racines sont réelles ou
des paires de racines complexes
conjuguées.

Exemple 2.31

$$p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$$

$$\rightarrow \frac{a_0}{a_n} = -2 \rightarrow \text{on teste } -2, -1, 1, 2.$$

$$p(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0.$$

$$\begin{array}{r}
 z^3 - 3z^2 + 4z - 2 \\
 - (z^3 - z^2) \\
 \hline
 -2z^2 + 4z - 2 \\
 - (-2z^2 + 2z) \\
 \hline
 2z - 2 \\
 - (2z - 2) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \overline{z-1} \\
 z^2 - 2z + 2
 \end{array}$$

$$\Rightarrow z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z-1)(z^2 - 2z + 2)$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

$$\omega_1 = -2i, \quad \omega_2 = 2i$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2 - 2i}{2}} = 1 - i$$

$$\sqrt{\frac{2 + 2i}{2}} = 1 + i$$

$$p(z) = (z-1)(z-1+i)(z-1-i)$$

Chapitre 3 : Suites de nombres réels

§ 3.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 3.1 (suite)

Une suite est la donnée d'une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Sauf, qu'à la place d'écrire $f(n)$, on écrit x_n . Pour parler de la suite en entier, on écrit $(x_n)_{n \geq 0}$ ce juste (x_n)

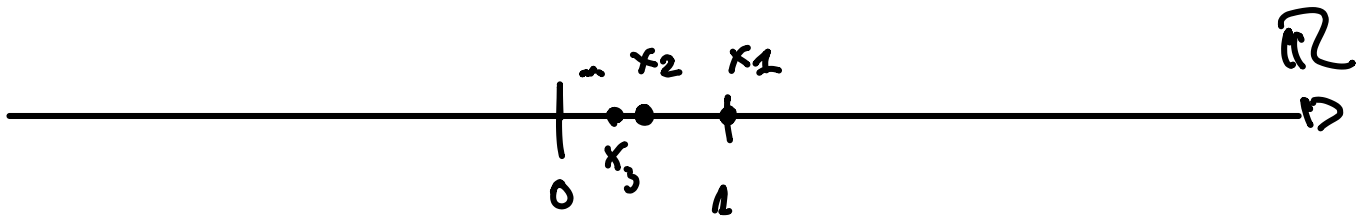
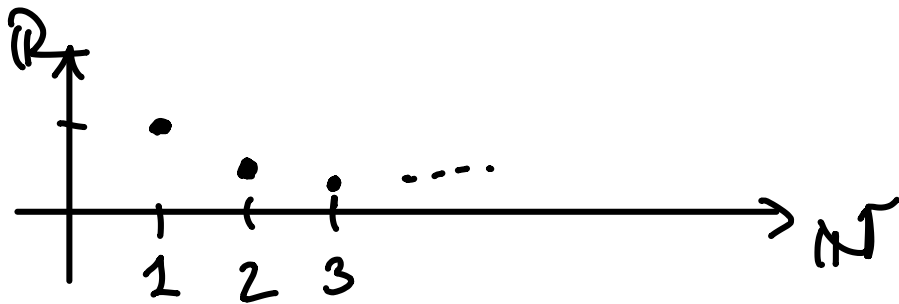
Des fois, on considère des suites qui commencent $n_0 \geq 1$. On écrit alors, $(x_n)_{n \geq n_0}$

Exemples 3.2

(i) La suite harmonique $(x_n)_{n \geq 1}$ est définie par $x_n = \frac{1}{n}$.

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(n) = \frac{1}{n}$$



(ii) La suite harmonique alternée

$$(x_n)_{n \geq 1}, \text{ définie par } x_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{1}{4}, \dots$$

(iii) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, définie par $x_n = 14$

$$x_0 = 14, x_1 = 14, x_2 = 14, \dots$$

(v) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$, définie par
 $x_n =$ le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 7, \dots$$

Définition 3.3 :

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que

(i) (x_n) est croissante si $\forall n \geq 0$,

$$x_{n+1} \geq x_n$$



(ii) (x_n) est strictement croissante

si $\forall n \geq 0, x_{n+1} > x_n$.

(iii) (x_n) est décroissante si $\forall n \geq 0$,

$$x_{n+1} \leq x_n$$



(iv) (x_n) est strictement décroissante

si $\forall n \geq 0, x_{n+1} < x_n$

(v) (x_n) est (strictement) monotone
si elle est (strictement)
croissante ou décroissante.

(vi) (x_n) est majorée si $\exists c \in \mathbb{R}$
tq $\forall n \geq 0, x_n \leq c$

(vii) (x_n) est minorée si $\exists c \in \mathbb{R}$
tq $\forall n \geq 0, x_n \geq c$

(viii) (x_n) est bornée si elle
est minorée & majorée.

Remarque 3.4

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite.

(i) la suite (x_n) est majorée
si et seulement si $\{x_n : n \geq 0\}$
est majoré.

(ii) la suite (x_n) est minorée si
et seulement si $\{x_n : n \geq 0\}$ est minoré.

Notation 3.5 $\sup(x_n)$ & $\inf(x_n)$

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite,

(i) Si (x_n) est minorée, on écrit $\inf x_n = \inf \{x_n : n \geq 0\}$

(ii) Si (x_n) est majorée, on écrit $\sup(x_n) = \sup \{x_n : n \geq 0\}$.